Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Dr. Rémi Jaoui — Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper
Blatt 7
Abgabe: 14.12.2021

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung sowie R ein Bewertungsring von K und S ein Bewertungsring von L mit $R \subset S$. Zeige, dass $S \cap K$ genau dann gleich R ist, wenn $\mathfrak{M}_S \cap R = \mathfrak{M}_R$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Sei R ein Bewertungsring des Körpers K.

(a) Zeige, dass jeder Oberring $R \subset S \subset K$ auch ein Bewertungsring von K ist.

(b) Gegeben eine Ringerweiterung $R \subset S \subset K$, zeige, dass $P = \mathfrak{M}_S \cap R$ ein Primideal von R ist, wobei $\mathfrak{M}_S$ das (einzige) maximale Ideal von S ist.

(c) Schließe daraus, dass die Lokalisierung R_P in S enthalten ist und dass $\mathfrak{M}_S \cap R_P = PR_P$. Insbesondere ist jede Ringerweiterung $R \subset S \subset K$ eine Lokalisierung des Bewertungringes R.

(d) Beschreibe alle in K erhaltenen Ringerweiterungen eines diskreten Bewertungsring $R \subset K$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Sei p eine feste Primzahl. Für $x \neq 0$ aus $\mathbb{Q}_p$, schreibe $x = \sum_{k=N}^{\infty} a_k p^k$ mit $0 \leq a_k \leq p-1$ und $\nu_p(x) = N$.

(a) Zeige, dass die p-adische Darstellung des Elementes $-x$ durch

$$-x = (p - a_N)p^N + \sum_{k \geq N+1}^{\infty} (p - 1 - a_k)p^k$$

gegeben wird.

(b) Wir nehmen nun an, dass x aus $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ kommt. Zeige, dass die p-adische Darstellungen von x und von $x + m$, für m aus $\mathbb{N}$, schließlich übereinstimmen.

HINWEIS: Es gibt unendlich oft Koeffizienten a_k von x wie oben, welche ungleich $p - 1$ sind.

(c) Schreibe nun t aus $\mathbb{Q} \cap (-1, 0)$ als irreduziblen Bruch $t = r/s$ mit $s > 0 > r$ und nimm an, dass p den Nenner s nicht teilt. Zeige, dass $p^e \equiv 1 \mod s$ für ein e aus $\mathbb{N}$. Schließe daraus, dass die p-adische Darstellung von t periodisch ist.

HINWEIS: Schreibe $t = m/(1 - p^e)$ für ein m aus $\mathbb{N}$ mit $0 < m < p^e$.

(d) Schließe daraus, dass die p-adische Darstellung jeder rationalen Zahl schließlich periodisch ist.

HINWEIS: Benutze (a) und (b), um lediglich den Fall (c) betrachten zu müssen.

Insbesondere ist die p-adische Zahl $\sum_{k=0}^{\infty} p^{k^2}$ nicht rational.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.30 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 15 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Das Blatt kann zu zweit eingereicht werden.